Yukawa-Potenzial

In Hausübung 74 war das elektrostatische Potenzial

$$\phi(\vec{r}) \;=\; \frac{q}{r}\,\mathrm{e}^{-\lambda r} \qquad \text{mit} \quad r = |\vec{r}|$$

einer abgeschirmtem Punktladung q zu ermitteln. Berechnen Sie die Fourier-Transformierte

$$\widetilde{\phi}(\vec{k}) \;=\; \int \mathrm{d}^3 r\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}\,\phi(\vec{r})$$

dieses so genannten Yukawa-Potenzials der Reichweite $\frac{1}{\lambda}$. Führen Sie hierzu im x-Raum Kugelkoordinaten ein, scheiben $\mathrm{d}^3 r = r^2 \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\cos\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$ und legen die z-Achse bequem in $\vec{k}$-Richtung. Führen Sie erst die φ-Integration aus, integrieren Sie dann über $\cos\vartheta \in [-1,+1]$ und schließlich über $r \in [0,\infty]$. Erhalten Sie den Ausgangspunkt der Hausübung 74 zurück?

Eindimensionale Wellengleichung

Die Lösungen der eindimensionalen homogenen Wellengleichung

$$\tfrac{1}{c^2}\partial_t^2\phi(x,t) \;-\; \partial_x^2\phi(x,t) \;=\; 0$$

lassen sich direkt ausdrücken durch die Anfangswerte

$$\phi(x,t{=}0) \;=\; \chi(x) \qquad \text{und} \qquad \partial_t\phi(x,t{=}0) \;=\; \psi(x)\;.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Kombination $\phi(x,t) = f(x{-}ct) + g(x{+}ct)$ mit willkürlichen Funktionen f und g die Wellengleichung löst. Diese Lösung ist allgemein.

(b) Drücken Sie die Anfangsdaten χ und ψ durch f und g aus und lösen Sie das Gleichungssystem nach f und g auf.

(c) Weisen Sie nach, dass sich damit die allgemeine Lösung darstellen lässt als

$$2\,\phi(x,t) \;=\; \chi(x{-}ct) \;+\; \chi(x{+}ct) \;+\; \tfrac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct}\mathrm{d}x'\;\psi(x')\;.$$

(d) Eine unendlich lange Saite wird ohne Anfangsgeschwindigkeit ($\psi \equiv 0$) auf dem Intervall $[-b,+b]$ linear ausgelenkt: $\chi(x) = (b-|x|)\,\Theta(b^2{-}x^2)$. Skizzieren Sie die zeitliche Entwicklung der Auslenkung für $t{=}0$, $t{=}\frac{b}{2c}$, $t{=}\frac{b}{c}$ und $t{=}\frac{2b}{c}$, wenn sich die Störung ausbreitet.

Bemerkung:
Die obige allgemeine Lösungsformel erhält man auch aus der Lösung der inhomogenen Wellengleichung gemäß Hausübung 77(e), wenn man die Anfangsdaten als Inhomogenität $c^2\,\rho(x',t') \;=\; \psi(x')\,\delta(t') \;+\; \chi(x')\,\dot{\delta}(t')$ liest. Der Nachweis wird mit einem Sonderpunkt belohnt.